

Ausbeutung von Fisch- und Waldbeständen: Systemdynamische Beschreibung und Simulation

Günther Karigl, TU Wien

Ökologische Modelle sind häufig derart komplex, daß mit exakten Methoden nur geringe Einsicht in das Modellverhalten möglich ist. Das gilt in besonderem Maß für die Behandlung solcher Modelle im Schulunterricht. Hier bietet sich die Simulation in besonderer Weise an. Im folgenden werden Ansätze zur Beschreibung des Wachstums von Fisch- und Waldbeständen, zweier lebenswichtiger Ressourcen unseres globalen Ökosystems, vorgestellt und die Auswirkungen einer wirtschaftlichen Ausbeutung mittels einfacher Simulationsmethoden untersucht. Als Ergänzung zu dieser Darstellung ist eine Programmdiskette mit Computerprogrammen zu sämtlichen besprochenen Modellen vom Autor erhältlich.

1. Einleitung

In ihren „Grenzen des Wachstums“ warnten Meadows and Randers (1972), daß bei anhaltender Zunahme der Weltbevölkerung, der Industrialisierung, der Umweltverschmutzung, der Nahrungsmittelproduktion und der Ausbeutung von natürlichen Rohstoffen die absoluten Wachstumsgrenzen auf der Erde im Laufe der nächsten hundert Jahre erreicht wären. Zwanzig Jahre danach kommen die Autoren in ihrem Folgewerk (Meadows et al., 1992) auf der Basis aktueller Daten zu dem Schluß, daß die Nutzung vieler natürlicher Ressourcen und die Freisetzung schlecht abbaubarer Schadstoffe die Grenzen des physikalisch Möglichen bereits überschritten hätten. Die täglichen Medienberichte über die Bedrohung vieler Pflanzen- und Tierarten, über den Streit um Fangquoten im Fischfang oder über die Bestrebungen zur Rettung der tropischen Wälder scheinen diese Warnungen zu bestätigen.

In dieser Darstellung sollen einige grundlegende Modelle zur Beschreibung des Wachstums und der Ausbeutung natürlicher Ressourcen vorgestellt werden. Die betrachteten Modelle zeigen, daß selbst auf lange Sicht eine wirtschaftliche Nutzung ohne existentielle Bedrohung der natürlichen Rohstoffquellen möglich ist. Darüber hinaus erfolgt die vorliegende Auswahl derart, daß sowohl zur Modellbildung als auch zum Verständnis des Modellverhaltens relativ einfache mathematische Methoden erforderlich sind. Dort, wo quantitative Lösungsmethoden fehlen oder im Schulunterricht nicht zur Verfügung stehen, führen - wie häufig in der angewandten Mathematik - qualitative Überlegungen und Simulationen zur Einsicht in die Dynamik der betrachteten Systeme.

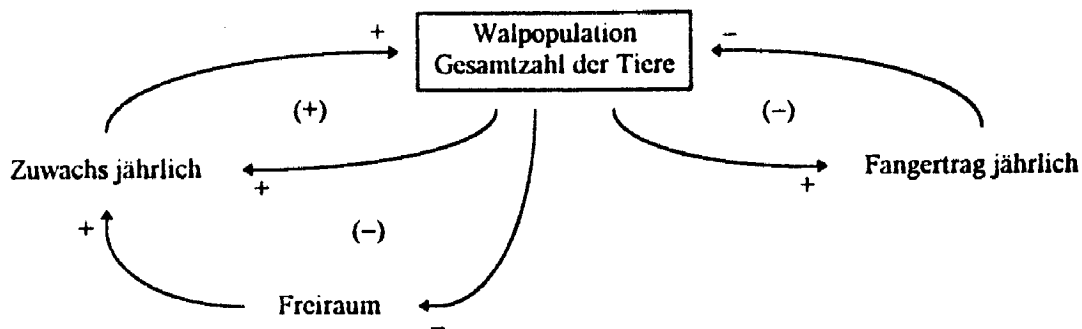
Im folgenden Abschnitt werden auf der Basis des logistischen Wachstumsmodells zwei verschiedene Fangstrategien für Fischpopulationen diskutiert, welche einen ökologisch zulässigen und auf Dauer aufrechterhaltbaren Ertrag ermöglichen. Danach folgen einige Überlegungen zu den mit der Ausbeutung verbundenen Kosten und dem erzielbaren Gewinn.

Im letzten Abschnitt betrachten wir ein Modell zur forstwirtschaftlichen Nutzung eines Waldes, dessen Bestand nach Größenklassen gegliedert ist. Dabei steht in allen Fällen das Prinzip der Nachhaltigkeit (engl. sustainability) im Vordergrund, d.h., wir interessieren uns stets für solche Zustände bzw. Erträge, welche im Rahmen der gegebenen Umwelt über unbeschränkte Zeiträume ohne grundsätzliche Veränderungen aufrechterhaltbar sind.

2. Grundlegende Modelle - Biologische Aspekte

Ein eindrucksvolles Beispiel für die Ausbeutung von Tierpopulationen stellt der Walfischfang dar. Bis in die Mitte unseres Jahrhunderts erlitt der Blauwalbestand in der Antarktis einen rapiden Rückgang von ursprünglich etwa 150000 Tieren auf ein Niveau, von dem aus eine Erholung unmöglich schien. Erst unter dem Schutz der International Whaling Commission (IWC) erfolgte in den Sechziger und Siebziger Jahren wieder ein Anstieg des Walbestandes auf geschätzte 8000 Tiere.

Wir wollen im folgenden ein einfaches Wachstumsmodell für eine Population mit inner-spezifischer Konkurrenz betrachten, welche einer wirtschaftlichen Ausbeutung unterliegt. Dazu modellieren wir das Populationswachstum als dynamisches System (vgl. Ossimitz, 1990), welches über drei Rückkoppelungen gesteuert wird: Der natürliche Zuwachs wird einerseits durch die Populationsgröße bestimmt (positive Rückkoppelung), andererseits durch einen Freiraum, d.h. die Differenz zwischen der aktuellen und einer vom Lebensraum abhängigen maximal möglichen Populationsgröße (negative Rückkoppelung). Darüber hinaus wird das Wachstum durch eine weitere negative Rückkoppelung aufgrund der Ausbeutung begrenzt, wie im folgenden Wirkungsdiagramm dargestellt ist.



Wir bezeichnen mit $x(t)$ die Populationsgröße zur Zeit t und machen den allgemeinen Ansatz

$$(1) \quad \frac{dx}{dt} = f(x) - h(x),$$

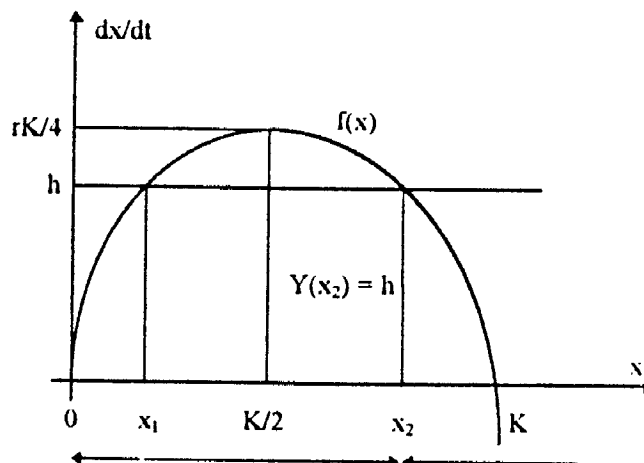
in dem die Wachstumsgeschwindigkeit dx/dt als Differenz einer natürlichen Wachstumsrate $f(x)$ und einer Fangrate $h(x)$ beschrieben wird. Gilt $f(x) = h(x)$ für eine bestimmte Populationsgröße x , so befindet sich das System im Gleichgewicht und ermöglicht den anhaltenden Fangertrag $Y = h(x)$. Man spricht von einem zulässigen oder nachhaltigen Ertrag Y (engl. yield), wenn dieser auf Dauer, also unter „Erhaltung der Rohstoffquellen“ erzielbar ist. Als Kriterium zur Beurteilung verschiedener Fangstrategien werden wir im folgenden den größtmöglichen nachhaltig erzielbaren Ertrag MSY (engl. maximal sustainable yield) heranziehen.

2.1 Logistisches Wachstum mit konstanter Fangrate

Ein einfaches Wachstumsmodell, bei welchem innerspezifisches Konkurrenzverhalten (wie oben angenommen) Berücksichtigung findet, ist das logistische Wachstum mit der Wachstumsrate $f(x) = r(1 - x/K)x$. Dabei bezeichnet r die relative Zuwachsrate und K die Umweltkapazität der Population, der im obigen Wirkungsdiagramm betrachtete Freiraum ist dann proportional zum Faktor $(1 - x/K)$. Die Fangrate $h(x) = h$ soll zunächst als konstant angenommen werden, was etwa im Fischfang der Situation fest vereinbarter jährlicher Fangquoten entspricht. Unter diesen Voraussetzungen erhalten wir aus (1) die Modellgleichung

$$(2) \quad \frac{dx}{dt} = r\left(1 - \frac{x}{K}\right)x - h.$$

Die Differentialgleichung (2) ist zwar exakt lösbar, wir interessieren uns jedoch nur für das qualitative Lösungsverhalten, welches aus nachfolgender Darstellung in der sogenannten Phasenebene ersichtlich ist.

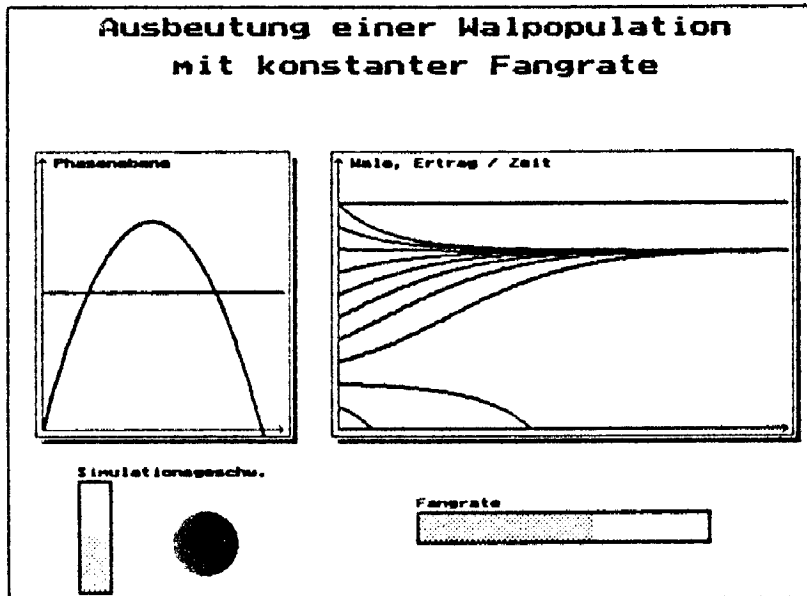


Für $h < f(K/2) = rK/4$ schneidet die Gerade $dx/dt = h$ die Parabel $dx/dt = f(x)$ in zwei Punkten x_1 und x_2 , welche wegen $dx/dt = f(x) - h = 0$ zwei Gleichgewichtslagen darstellen. Zwischen x_1 und x_2 gilt $dx/dt > 0$, also nimmt die Populationsgröße $x(t)$ dort zu, außerhalb dieses Intervalls nimmt $x(t)$ ab (siehe Abbildung). Somit ist x_1 instabiler und x_2 stabiler Gleichgewichtspunkt. Im Punkt x_2 ist der nachhaltige Fangertrag $Y(x_2) = h$ erzielbar, trotz andauernder Ausbeutung wird die Population auf diesem Niveau verbleiben und selbst nach kleineren Störungen wieder zu diesem Gleichgewichtswert zurückkehren.

Im Fall $h = rK/4$ wird der maximal zulässige Ertrag $MSY = rK/4$ erreicht, die zugehörige Populationsgröße beträgt mit $x_2 = K/2$ genau die Hälfte der natürlichen Umweltkapazität K . Dieser Ertrag wird allerdings genau an der Stabilitätsgrenze erreicht, schon bei kleinen Störungen kann die Fangstrategie mit konstanter maximaler Fangrate zum Zusammenbruch der Population führen.

Um einen Überblick über den Verlauf einzelner Lösungskurven zu vorgegebenen Anfangsbedingungen zu erhalten, bestimmen wir Näherungslösungen der Differentialgleichung (2) etwa nach dem Eulerschen Polygonzugverfahren, dem verbesserten Eulerschen Polygonzugverfahren oder nach dem Runge-Kutta-Verfahren (siehe Karigl, 1991). Das Ergebnis eines

derartigen Simulationslaufes zeigt deutlich die verschiedenen Gleichgewichtslagen und deren Einzugsbereiche.

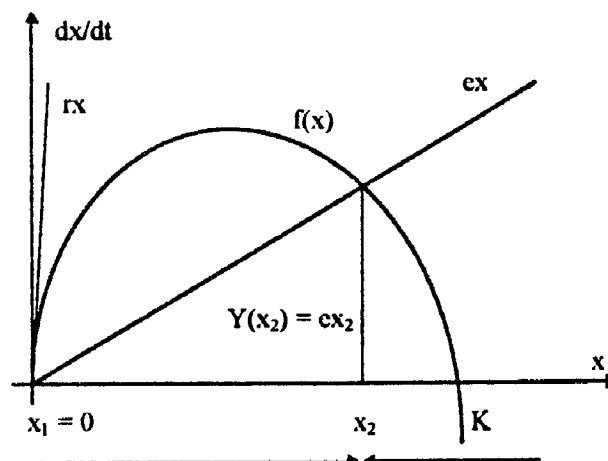


2.2 Logistisches Wachstum mit konstanter Fangintensität

Wir untersuchen im folgenden den Ansatz $h(x) = ex$, d.h., wir nehmen an, daß etwa die Anzahl der jährlich gefangenen Fische proportional zum vorhandenen Fischbestand ist. Die Proportionalitätskonstante e heißt Fangintensität (engl. harvesting effort) und wird bestimmt durch die Anzahl der eingesetzten Fangschiffe, der Netze, der Fischtage pro Jahr, usw. Dieser Ansatz führt auf das Modell von Schaefer

$$(3) \quad \frac{dx}{dt} = r\left(1 - \frac{x}{K}\right)x - ex = (r - e)\left(1 - \frac{x}{K(1 - e/r)}\right)x,$$

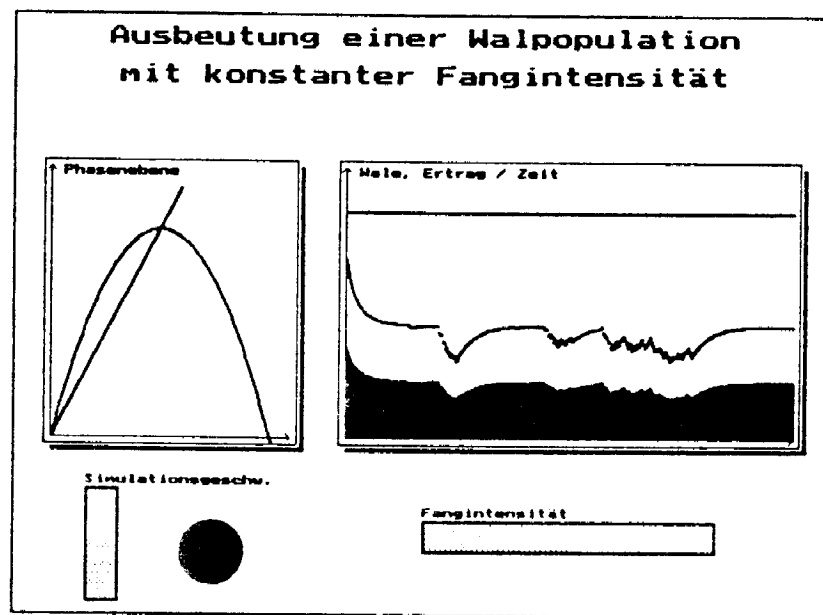
welches eine modifizierte logistische Differentialgleichung mit den Parametern $r' = r - e$ und $K' = K(1 - e/r)$ darstellt. Setzen wir $dx/dt = 0$, so erhalten wir die beiden Gleichgewichtslagen $x_1 = 0$ und $x_2 = K(1 - e/r)$ (für $e < r$). Das Stabilitätsverhalten und der jeweils erzielbare Ertrag können wieder aus dem Phasendiagramm abgelesen werden.



Offensichtlich ist die Populationsgröße für $x < x_2$ steigend und für $x > x_2$ fallend, sodaß bei x_2 ein stabiler Gleichgewichtspunkt liegt, in dem der zulässige Ertrag $Y(x_2) = ex_2$ erzielt werden kann. Zur Bestimmung des maximal zulässigen Ertrages fassen wir nun $Y = Y(e)$ als Funktion der Fangintensität e auf und studieren die Extremwertaufgabe

$$(4) \quad Y(e) = ex_2 = eK\left(1 - \frac{e}{r}\right) = \max!$$

mit der Lösung $MSY = rK/4$ für $e = r/2$ und $x_2 = K/2$. Der maximale, nachhaltig erzielbare Ertrag ist somit genauso groß und wird auch für dieselbe Populationsgröße erreicht wie beim vorhergehenden Modell mit konstanter Fangrate. Die Strategie mit konstanter Fangintensität reagiert jedoch flexibel auf Populationschwankungen, Störungen werden stets aufgefangen und ein Aussterben der Population ist selbst im Ertragsmaximum nicht möglich. Das bestätigt auch der unten wiedergegebene Simulationslauf, der zeigt, wie die Population bei Ausbeutung mit maximal zulässigem Ertrag trotz Störungen immer wieder zum vorbestimmten Gleichgewichtswert zurückkehrt.



Betrachten wir als Beispiel die eingangs erwähnte Blauwalpopulation in der Antarktis, welche nach Clark (1976) in brauchbarer Näherung durch einen logistischen Wachstumsprozeß mit der relativen Zuwachsrate $r = 0,05$ pro Jahr und der Umweltkapazität $K = 150000$ Tiere beschrieben werden kann. Daraus resultiert zur Aufrechterhaltung einer maximal zulässigen Ausbeutung von $MSY = rK/4 \approx 2000$ Tieren pro Jahr eine notwendige Populationsgröße von $x_2 = K/2 = 75000$ Wale (gegenüber einem tatsächlichen Bestand von ca. 8000 Tieren!).

Setzt man nun - in einem Gedankenexperiment - den Marktwert eines Blauwals in der Größenordnung von \$ 10.000,- an, ergibt sich für obiges Beispiel im Ertragsmaximum ein Jahresumsatz von \$ 20 Millionen. Würde man andererseits den gesamten Walbestand innerhalb eines Jahres ausrotten und das dabei erworbene Kapital in der Höhe von \$ 750 Millionen zu einem Zinssatz von 5% pro Jahr anlegen, so führt diese Strategie (bei zugegeben extremer Vereinfachung, insbesondere ohne Berücksichtigung der Kostenseite) auf einen jährlichen

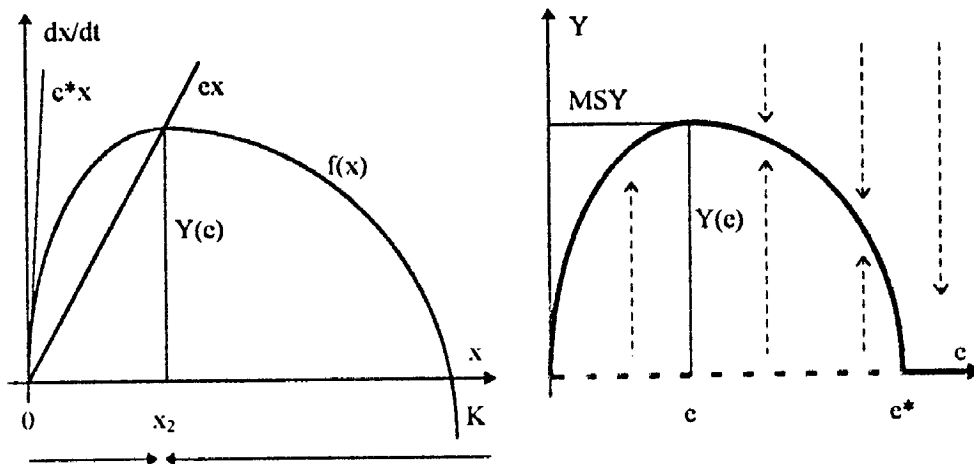
Umsatz von \$ 37,5 Millionen, also beinahe auf das Doppelte des Erlöses gegenüber nachhaltiger Nutzung des Blauwalbestandes. Aus rein ökonomischer Sicht scheint unsere Gesellschaft kaum Interesse an der Erhaltung ihrer Rohstoffquellen zu besitzen. Das Beispiel zeigt, daß bei Fragen zur Ausbeutung einer natürlichen Ressource neben ökologischen vor allem auch ökonomische Aspekte eine wichtige Rolle spielen.

2.3 Kompensation und Depensation

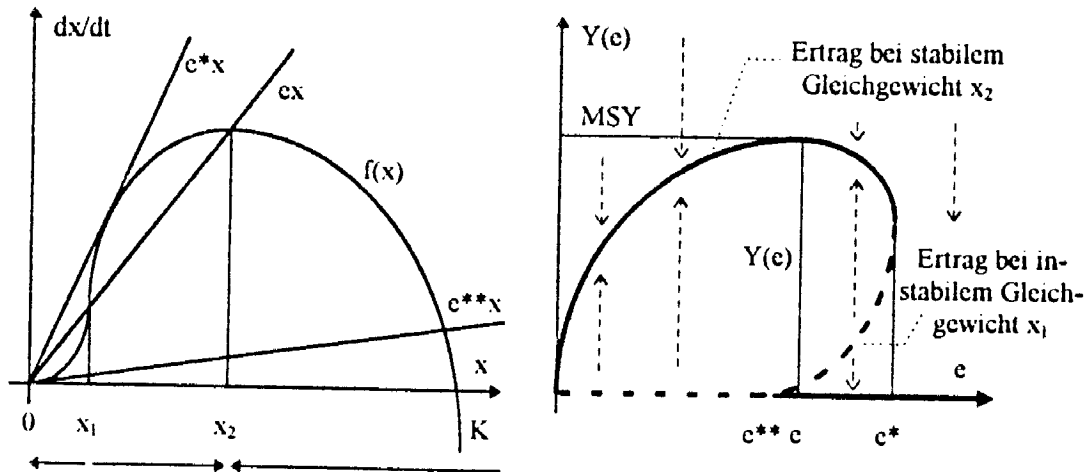
Neben dem in den beiden vorhergehenden Abschnitten zugrunde gelegten logistischen Wachstumsmodell gibt es zahlreiche weitere Ansätze zur Beschreibung des Populationswachstums. Wir bezeichnen die natürliche Wachstumsrate der Population wieder mit $f(x)$ und betrachten den allgemeinen Modellansatz

$$(5) \quad \frac{dx}{dt} = f(x) - ex$$

mit konstanter Fangintensität, d.h. konstantem Fangaufwand e . Verläuft die Funktion $f(x)$ wie nachstehend abgebildet (linke Kurve in der Phasenebene), sodaß die relative Wachstumsrate $r(x) = f(x)/x$ - so wie beim logistischen Modell - eine fallende Funktion in x ist, spricht man allgemein von einem Kompensationsmodell. In diesem Fall existiert stets ein maximal zulässiger Ertrag MSY , welcher in einem stabilen Gleichgewichtspunkt erreicht wird. Wie aus der nebenstehenden Darstellung der sogenannten Aufwand-Ertrag-Kurve $Y = Y(e)$ (rechte Kurve) ersichtlich ist, kann das Ertragsmaximum in der Praxis durch Kontrolle des Aufwandes e und Beobachtung des jeweiligen Ertrags $Y(e)$ leicht gefunden werden.

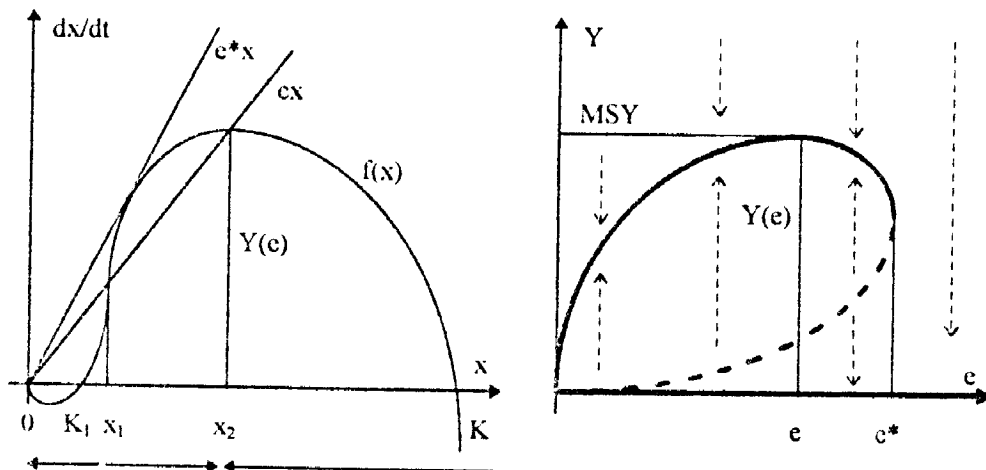


Anders ist die Situation im Fall eines Depensationsmodells, d.h., falls $r(x) = f(x)/x$ für kleine x eine steigende Funktion in x darstellt (siehe folgende Abbildung). Ein derartiges Verhalten ist beispielsweise dann zu erwarten, wenn die betrachtete Population einer Bedrohung durch Räuber oder anderen Umweltgefahren ausgesetzt ist, die aber mit zunehmender Bestandsgröße immer weniger ins Gewicht fallen.



Liegt der Aufwand e in obigem Beispiel im Intervall $e^{**} < e < e^*$, so besitzt das System (5) neben 0 und x_2 einen weiteren, instabilen Gleichgewichtspunkt x_1 . Die Population kann in diesem Fall - abhängig vom Ausgangspunkt - entweder dem positiven stabilen Gleichgewicht x_2 zustreben, oder aber aussterben. Mit zunehmendem Aufwand e wird der Ertrag $Y(e)$ zunächst bis zum Ertragsmaximum MSY ansteigen, um danach wieder abzunehmen. Für $e = e^*$ schließlich bewirkt eine minimale Vergrößerung des Aufwandes einen katastrophalen Ertragsrückgang, der auch durch mäßige Verringerung der Fangintensität nicht aufgehoben werden kann. Erst für $e < e^{**}$ ist eine Erholung der Population möglich (Hysterese-Effekt).

Eine vollkommene Ausrottung des Populationsbestandes ist in beiden zuvor betrachteten Fällen nicht wahrscheinlich, da in der Realität mit abnehmendem Ertrag auch der Fangaufwand verringert werden wird. Ist die betrachtete Population jedoch erst ab einer bestimmten Größe K_1 überlebensfähig (man spricht in diesem Fall von kritischer Depensation), so führt - wie aus der folgenden Abbildung ersichtlich - das Überschreiten eines kritischen Aufwandes $e = e^*$ unweigerlich zum Aussterben der Population. Dieses Schicksal wird z.B. der Wandertaube (*Ectopstes migratorius*) in Amerika zugeschrieben: Die ursprünglich etwa 7 Milliarden Vögel waren im Lauf des 19. und Anfang des 20. Jahrhunderts ein beliebtes Jagdobjekt und sind heute zur Gänze ausgestorben.

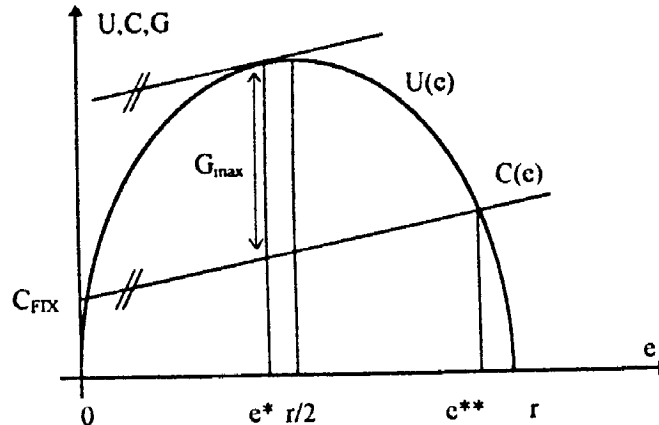


3. Ausbeutung aus ökonomischer Sicht

Wie wir bereits gesehen haben, wirft die Nutzung natürlicher Ressourcen nicht nur ökologische, sondern vor allem auch wirtschaftliche Fragen auf. Kehren wir wieder zurück zum Modellansatz von Schaefer (3), für den wir einen zulässigen Fangertrag $Y(e) = eK(1 - e/r)$ in Abhängigkeit von der Fangintensität bzw. dem damit verbundenen Aufwand e bestimmt haben. Unter der Annahme eines festen Preises p pro Einheit Biomasse der betrachteten Population ist dann der Umsatz $U(e) = pY(e)$ proportional zum Fangertrag. Ferner sind mit der Ausbeutung auch Kosten verbunden, welche wesentlich vom Aufwand e bestimmt werden. Wir machen für die Kosten C den Ansatz $C(e) = C_{\text{FIX}} + C_{\text{VAR}} e$, wobei C_{FIX} die Fixkosten (etwa für Schiff und Ausrüstung) und C_{VAR} die variablen Kosten (das sind z.B. Betriebskosten, Lohnkosten) bezeichnen. Für den nachhaltig erzielbaren Gewinn G ergibt sich daraus

$$(6) \quad G(e) = U(e) - C(e) = pY(e) - (C_{\text{FIX}} + C_{\text{VAR}} e).$$

In nachstehender Abbildung ist der Gewinn $G(e)$ zum Aufwand e als Abstand zwischen der Umsatzkurve und der Kostengeraden ersichtlich. Der maximal zulässige Gewinn wird offenbar an jener Stelle e^* erreicht, an der die Tangente an die Umsatzparabel parallel zu den Kosten verläuft. Wegen $e^* < r/2$ gilt für die Gleichgewichtspopulation $x(e) = K(1 - e/r)$ (vgl. Abschnitt 2.2) im Gewinnmaximum $x(e^*) > x(r/2) = K/2$, d.h., der Populationsbestand verbleibt bei nachhaltiger Gewinnmaximierung auf einem höheren Niveau als bei Maximierung des zulässigen Fangertrags.



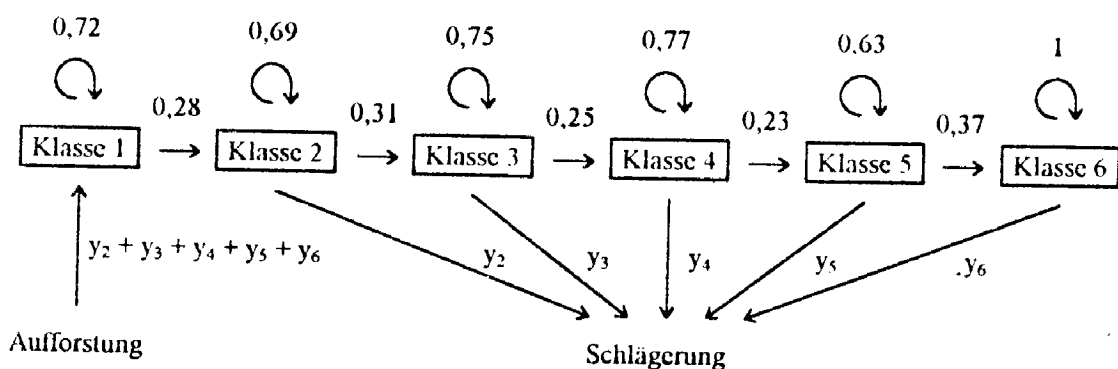
Dieses Ergebnis ist allerdings nur dann gültig, wenn etwa ein Fischbestand von einem einzigen Fangunternehmen genutzt und kontrolliert wird. Stehen die Fischgründe jedoch potentiell für alle Produzenten offen (engl. open-access fishery), ist deren Ausbeutung so lange wirtschaftlich sinnvoll, als damit ein (auch nur minimaler) Gewinn verbunden ist. Dadurch kommt es zu einer Steigerung des Fangaufwandes e bis an die Grenze e^{**} (siehe Abbildung), bei welcher der Gewinn schließlich verschwindet. Dieses Verhalten führt zu einer Überfischung in zweifachem Sinn (vgl. Doucet and Sloep, 1992): Einerseits geht den Fangunternehmen und damit letztlich der gesamten Industriegesellschaft ein möglicher Gewinn zum Teil oder sogar zur Gänze verloren (ökonomische Überfischung), andererseits fällt dann wegen $e^{**} > r/2$ der Fischbestand auf einen Wert $x(e^{**}) < K/2$ unter jenen für maximal zulässigen Ertrag, was für die Population ein geringes Wachstum und eine erhöhte Gefahr des Aussterbens mit sich bringt (biologische Überfischung).

Aus diesem Grund gingen die Fangergebnisse aus der Hochseefischerei in den letzten Jahrzehnten weltweit zurück. Die Vorkommen von Thunfischen im Westatlantik beispielsweise wurden zwischen 1970 und 1990 um 94% reduziert. In den USA sind 14 der kommerziell bedeutungsvollen Fischarten ernsthaft dezimiert und würden 5 bis 15 Jahre zur Auffrischung ihrer Bestände benötigen. Für ein weiterführendes Studium der ökologischen und ökonomischen Aspekte bei der Nutzung natürlicher Ressourcen wird auf Getz and Haight (1989) sowie auf Dolezal (1991) verwiesen.

4. Ein Ansatz zur Ausbeutung in altersstrukturierten Populationen

Bei realen Populationen kann zumeist eine natürliche Gliederung in mehrere Klassen beobachtet werden, wie z.B. Entwicklungsstadien von Insekten, Größenklassen bei Fischen oder Altersklassen bei den Bäumen eines Waldes. In Karigl (1992) ist ein 3-Klassen-Modell einer Fischpopulation beschrieben, mit welchem der Fangertag bei unterschiedlicher Wahl der Fangraten in den einzelnen Klassen untersucht werden kann. Im folgenden Abschnitt wird ein Modell zur Bewirtschaftung eines Waldes vorgestellt, dessen Bäume der Höhe nach in Klassen untergliedert sind.

Die meisten Forstverwaltungen in europäischen Ländern richten sich nach dem Prinzip der Nachhaltigkeit: Schlägerungen werden durch Aufforstungen kompensiert, sodaß der Waldbestand langfristig erhalten bleibt. In Österreich macht die Waldfläche etwa 45% des Bundesgebietes aus. Wir betrachten als Beispiel einen Fichtenwald in Schottland, dessen Bestand in sechs Größenklassen gegliedert ist. Für eine Wachstumsperiode von 6 Jahren wurde das in folgender Abbildung dargestellte Wachstumsverhalten ermittelt (vgl. Rorres und Anton, 1979, und Goldenits, 1995).



Es bezeichne x_i den relativen Baumbestand und y_i den Einschlag pro Periode in der i -ten Klasse (für $i = 1, \dots, 6$), wobei $x_1 + \dots + x_6 = 1$ und $y_1 = 0, y_2, \dots, y_6 \geq 0$ gelte. Ferner sei g_i (für $i = 1, \dots, 5$) der Anteil jener Bäume in der i -ten Klasse, welche innerhalb einer Wachstumsperiode in die $(i + 1)$ -ste Klasse aufsteigen, also $g_1 = 0,28$, usw. (siehe Abbildung). Gehen wir davon aus, daß nach jedem Einschlag eine Aufforstung im Ausmaß der gefällten Bäume erfolgt, so läßt sich das betrachtete System wie folgt beschreiben (' bezeichnet jeweils die nächstfolgende Periode):

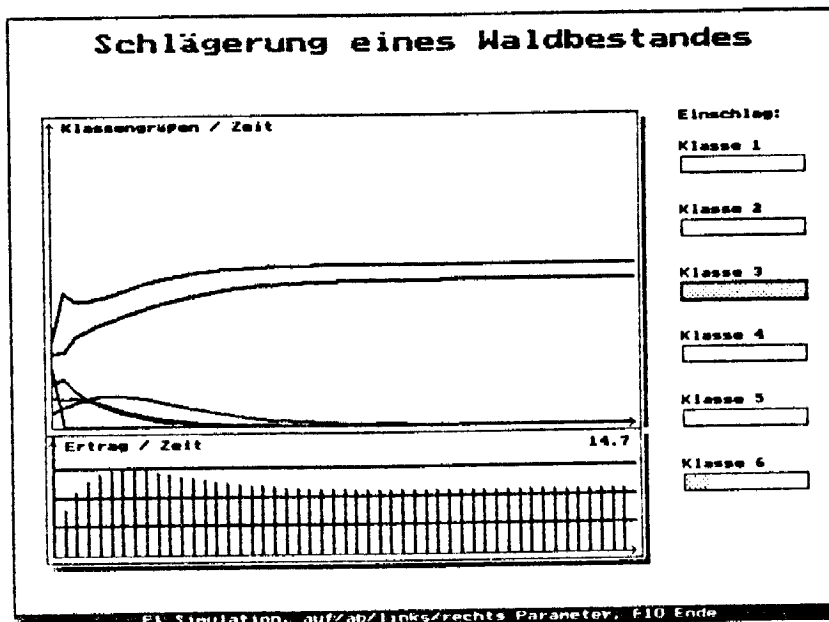
$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= (1-g_1)x_1 + y_2 + \dots + y_6 \\
 \dot{x}_2 &= g_1x_1 + (1-g_2)x_2 - y_2 \\
 (7) \quad \dot{x}_3 &= g_2x_2 + (1-g_3)x_3 - y_3 \\
 &\dots \\
 \dot{x}_6 &= g_5x_5 + x_6 - y_6
 \end{aligned}$$

Wir suchen mittels Simulation den maximalen, nachhaltig erzielbaren Ertrag, wenn für je einen Baum der Klasse i folgende Preise p_i (in \$) erzielt werden können: $p_1 = 0$, $p_2 = 50$, $p_3 = 100$, $p_4 = 150$, $p_5 = 200$ und $p_6 = 250$.

Dazu setzen wir $y_i = h_i x_i$ mit $0 \leq h_i \leq 1$ (für $i = 2, \dots, 6$) und berechnen zu vorgegebenen relativen Schlägerungsraten h_i die Entwicklung des Waldbestandes $x = (x_1, \dots, x_6)$ durch Iteration nach Gleichung (7). In jedem Zeitschritt wird der Erlös Y (pro Baum des Bestandes) ermittelt gemäß

$$(8) \quad Y(x) = p_2 y_2 + \dots + p_6 y_6 = p_2 h_2 x_2 + \dots + p_6 h_6 x_6.$$

Wie die Simulation zeigt, pendelt sich der Ertrag nach kurzer Zeit auf einen Gleichgewichtswert ein. Durch unterschiedliche Wahl der Schlägerungsraten h_i und Vergleich der daraus resultierenden Erträge Y erkennen wir, daß der nachhaltig erzielbare Ertrag im konkreten Beispiel dann am größten ist, wenn die dritte Klasse zur Gänze und sonst keine weitere Klasse abgeholzt wird. Damit verbleiben allerdings nur mehr Bäume der ersten drei Klassen im Wald.



Allgemein kann gezeigt werden, daß ein zulässiger Ertrag genau dann möglich ist, falls $g_1 x_1 \geq g_2 x_2 \geq \dots \geq g_5 x_5 \geq 0$ gilt. Der maximal zulässige Ertrag MSY, welcher als Lösung einer linearen Optimierungsaufgabe exakt bestimmt werden kann, wird stets dann erreicht, wenn alle Bäume einer bestimmten Klasse und keine Bäume aus anderen Klassen geschlägert werden. Dabei gilt

$$(9) \quad \text{MSY} = \max_{k \geq 2} \left\{ \frac{p_k}{g_1^{-1} + g_2^{-1} + \dots + g_{k-1}^{-1}} \right\},$$

wobei k den Index jener Klasse angibt, welche vollständig geschlägert wird (siehe Rorres und Anton, 1979). In obigem Beispiel wird dieses Maximum für $k = 3$ erreicht und beträgt $\text{MSY} = 100/(0,28^{-1} + 0,31^{-1}) = 14,7$ \$ pro Baum des gesamten Waldbestandes.

Literatur

- Clark C.W. (1976): *Mathematical Bioeconomics. The Optimal Management of Renewable Resources*. John Wiley & Sons, New York.
- Dolezal A. (1991): *Mathematische Modelle zur Optimierung der Ausbeutung von Tierpopulationen*. Diplomarbeit, Technische Universität Wien.
- Doucet P.G. and P.B. Sloep (1992): *Mathematical Modelling in the Life Sciences*. Horwood, Chichester.
- Getz W.M. and R.G. Haight (1989): *Population Harvesting. Demographic Models of Fish, Forest and Animal Resources*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey.
- Goldenits W. (1995): *Mathematische Ansätze zur Ausbeutung in altersstrukturierten Populationen*. Diplomarbeit, Technische Universität Wien.
- Karigl G. (1991): *Modellbildung und Simulation ökologischer Systeme im Unterricht. Didaktik-Reihe der ÖMG, Heft 19, S. 108 - 128*.
- Karigl G. (1992): *Umweltprojekte im Mathematikunterricht. Didaktik-Reihe der ÖMG, Heft 20, S. 13 - 26*.
- Meadows D.H., D.L. Meadows, J. Randers and W.W. Behrens (1972): *The Limits to Growth*. Universe Books, New York.
- Meadows D.H., D.L. Meadows and J. Randers (1992): *Die neuen Grenzen des Wachstums*. Deutsche Verlags-Anstalt, Stuttgart.
- Ossimitz G. (1990): *Materialien zur Systemdynamik*. Hölder-Pichler-Tempsky, Wien und Teubner, Stuttgart.
- Rorres Ch. and H. Anton (1979): *Applications of Linear Algebra*. John Wiley & Sons, New York.

Anschrift des Verfassers:

Univ.Doiz. Dr. Günther Karigl
Abteilung für Mathematische Biologie der Technischen Universität Wien
A-1040 Wien, Wiedner Hauptstraße 8-10
Email: gkarigl@email.tuwien.ac.at